Themenbereich: Kongruenzsätze

Lernziele:

- Kenntnis der genauen Formulierung der Kongruenzsätze
- Kenntnis der Bedeutung der Kongruenzsätze
- Fähigkeit, die Kongruenzssätze gezielt zur Begründung gewisser Eigenschaften von Figuren einzusetzen

Fragen:

1. Welche Kongruenzsätze gibt es?
2. Wie lauten die genauen Formulierungen der Kongruenzsätze?
3. Welche Bedeutungen haben die Kongruenzsätze?
4. Warum spielen die Kongruenzsätze in der Geometrie eine so große Rolle?

Aufgabe 1:

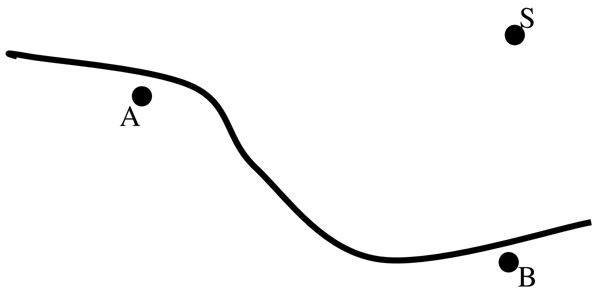
Welche der folgenden Dreiecke sind eindeutig konstruierbar? Begründe deine Antwort.
Beschreibe in diesen Fällen zunächst die Konstruktion und führe dann die Konstruktion durch.

a) $a = 5cm$, $\beta = 30°$, $\gamma = 110°$ b) $b = 6cm$, $c = 7cm$, $\beta = 70°$ c) $b = 8cm$, $\beta = 145°$, $\gamma = 55°$

d) $a = 7cm$, $c = 8cm$, $\gamma = 70°$ e) $a = 5cm$, $b = 10cm$, $c = 4cm$ f) $b = 4cm$, $c = 4cm$, $\alpha = 90°$

Aufgabe 2:

Am Ufer einer Küste stehen zwei Leuchttürme A und B, die voneinander 500m entfernt sind und deren Koordinaten, d. h. deren genauen Positionen, bekannt sind. Auf einem Schiff S auf dem Meer wird das Leuchtfeuer der Leuchttürme empfangen, wodurch der Kapitän in der Lage sein soll, die Position des Schiffes auf dem Meer zu ermitteln.
Der Kapitän peilt mit einem geeigneten Messgerät die Leuchtfeuer der beiden Leuchttürme A und B an und misst dabei den Winkel zwischen Leuchtturm A, Schiff und Leuchtturm B, also $\sphericalangle ASB$, zu 50°.



Fertige eine Skizze an und begründe damit, ob man damit die Position des Schiffes ermitteln kann. Wenn ja, dann bestimme die Lage des Schiffes bzgl A und B, wenn nein, dann erkläre, warum es nicht geht und was man ggf. noch zusätzlich wissen müsste.

Aufgabe 3:

Für die folgenden Teilaufgaben soll der Maßstab 1 : 2000000 verwendet werden.

a) Welche Bedeutung hat ein Maßstab? Wie sind auf einer Karte die Himmelsrichtungen festgelegt und welche Gradzahlen besitzen sie?
b) Frankfurt liegt 80km nördlich von Heidelberg (Luftlinie); Würzburg ist von Heidelberg 100km und von Frankfurt 96km entfernt. Fertige eine Zeichnung an. Gib die Himmelsrichtung an, in der Würzburg von Frankfurt aus liegt.
c) Kaiserslautern ist von Heidelberg 68km entfernt und von Frankfurt 100km. Ermittle zeichnerisch die Entfernung Kaiserslautern – Würzburg.

Aufgabe 4:

Ein regelmäßiges Sechseck lässt sich in 6 kongruente Dreiecke zerlegen. Begründe dies auf mindestens 2 verschiedene Arten.

Themenbereich: Kongruenzsätze

Antworten zu den Fragen:

zu 1. Es gibt die 4 Kongruenzsätze SSS, SWS, WSW bzw. SWW und SsW.
Hinweis: Mache dir jeweils eine Überlegungsfigur und trage die gegebenen Bestimmungsstücke farbig ein.

zu 2. Formulierungen siehe Arbeitsblatt.

zu 3. 1. Bedeutung: Sie geben an, ob zwei Dreiecke, die in gewissen Bestimmungsstücken übereinstimmen, kongruent sind. Sie sind es nur, wenn sie in solchen Bestimmungsstücken übereinstimmen, die einem Kongruenzsatz entsprechen.

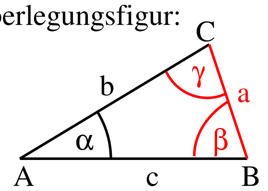
2. Bedeutung: Sie geben an, ob ein Dreieck durch die gegebenen Bestimmungsstücke eindeutig konstruierbar ist. Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar, wenn nur solche Bestimmungsstücken vorgegeben sind, die einem Kongruenzsatz entsprechen. Dabei müssen grundlegende Eigenschaften eines Dreiecks, wie die Dreiecksungleichung und die Winkelsumme, erfüllt sein.

zu 4. Viele komplizierteren Figuren, wie Vierecke, Fünfecke usw., lassen sich in Dreiecke zerlegen. Will man z. B. begründen, ob zwei Vielecke kongruent sind, so führt man dies auf die Kongruenz der einzelnen Teildreiecke zurück.

Lösungen zu den Aufgaben:

zu Aufgabe 1:

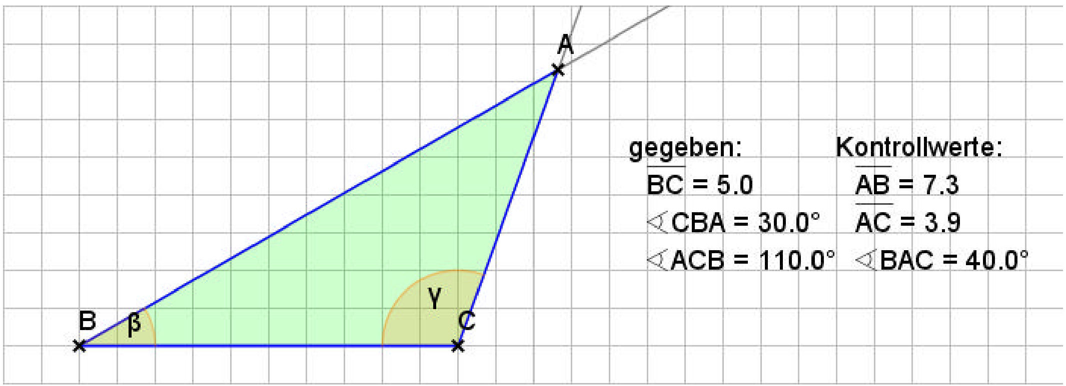
a) Überlegungsfigur:



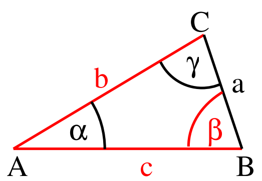
Begründung:
Dreieck ist eindeutig konstruierbar, da der WSW-Satz erfüllt ist.

Konstruktionsbeschreibung:
1. aus a folgt [BC]
2. Winkel β an [BC antragen
3. Winkel γ an [CB antragen
4. aus 2. und 3. ergibt sich A als Schnittpunkt der beiden Schenkel

Konstruktion:

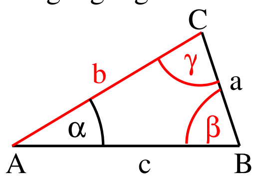


b) Überlegungsfigur:



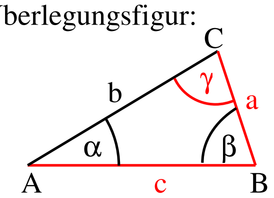
Begründung:
Dreieck ist nicht eindeutig konstruierbar, da der SsW-Satz nicht erfüllt ist. Der Winkel liegt nicht der größeren Seite gegenüber.

c) Überlegungsfigur:



Begründung:
Bestimmungsstücke erfüllen den SWW-Satz; trotzdem ist das Dreieck nicht konstruierbar, da $\beta + \gamma$ bereits über 180° ist und daher der Satz von der Winkelsumme im Dreieck nicht erfüllt ist.

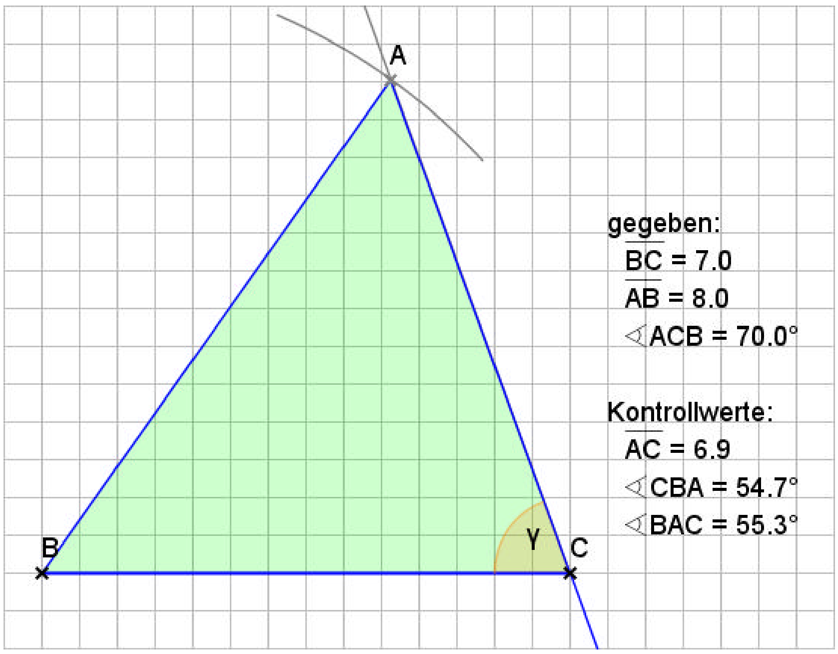
d) Überlegungsfigur:



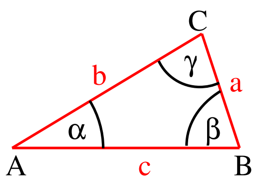
Begründung:
Dreieck ist eindeutig konstruierbar wegen SsW-Satz

Konstruktionsbeschreibung:
1. aus a folgt [BC]
2. Winkel γ an [CB antragen
3. Kreis um B mit Radius c
4. aus 2. und 3. ergibt sich A als Schnittpunkt des Schenkels mit dem Kreis

Konstruktion:

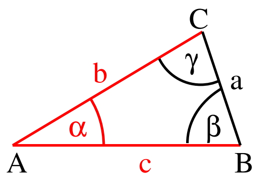


e) Überlegungsfigur:



Begründung:
Bestimmungsstücke erfüllen den SSS-Satz; trotzdem ist das Dreieck nicht konstruierbar, da a + c < b und daher die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist.

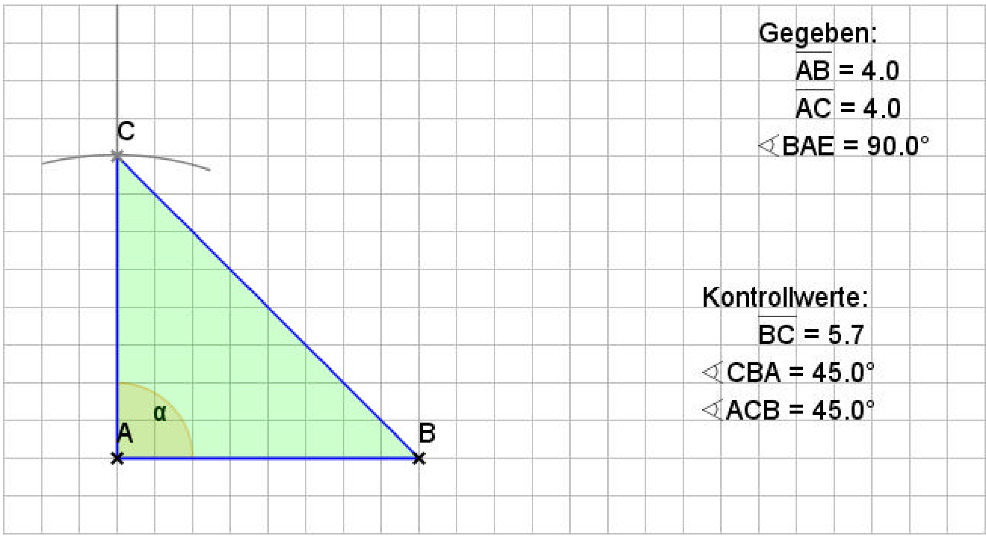
f) Überlegungsfigur:



Begründung:
Dreieck ist eindeutig konstruierbar wegen SWS-Satz

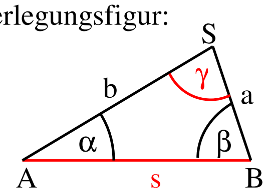
Konstruktionsbeschreibung:
1. aus c folgt [AB]
2. Winkel α an [AB antragen
3. Kreis um A mit Radius b
4. aus 2. und 3. ergibt sich C als Schnittpunkt des Schenkels mit dem Kreis

Konstruktion:



zu Aufgabe 2:

Überlegungsfigur:



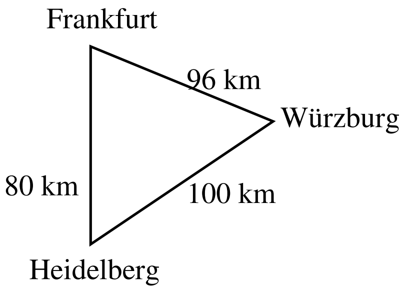
Begründung:
Die Leuchttürme A und B und das Schiff S bilden ein Dreieck von dem die Seite [AB] und der Winkel γ bei S bekannt sind.
Das Dreieck ist damit aber nicht eindeutig konstruierbar, da ein weiteres Bestimmungsstück fehlt.

Wie erhält man ein weiteres Bestimmungsstück?
Vom Schiff aus müsste mit einem geeigneten Entfernungsmessgerät z.B. die Länge von S nach A ermittelt werden. Dies ist mit heutigen Möglichkeiten, wie z. B. einem Entfernungsmessgerät mit Laser denkbar.
Früher gab es diese Möglichkeiten natürlich nicht. Deswegen konnte die Position des Schiffes mit Hilfe von nur zwei Leuchttürmen nicht ermittelt werden. Man brauchte dazu einen dritten Leuchtturm. Dann konnte man mit Hilfe eines relativ aufwändigen Konstruktionsverfahrens die Position des Schiffes bestimmen.
Heute verwendet man bequemerweise zur Positionsbestimmung ein GPS-System.

zu Aufgabe 3:

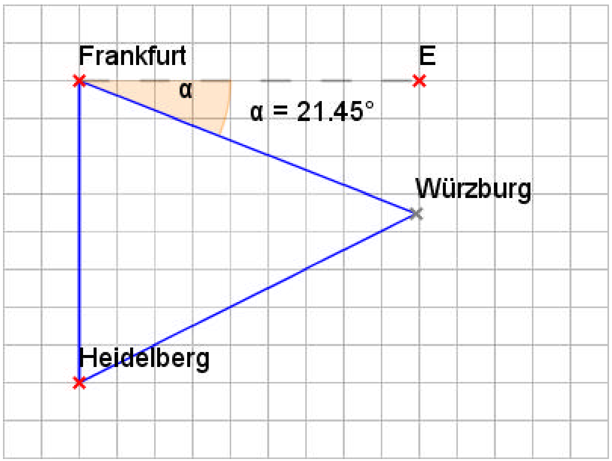
a) Ein Maßstab von 1 : 2000000 bedeutet, dass eine Strecke von 1cm auf der Karte in Wirklichkeit 2000000cm und damit 20000m = 20km lang ist.
Auf einer Karte ist oben Norden (Gradzahl 0°), rechts Osten (90°), unten Süden (180°), links Westen (270°).

b) Überlegungsfigur:



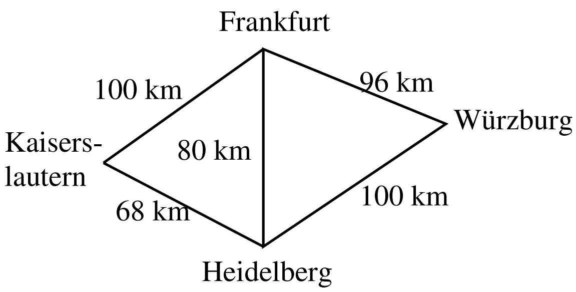
wegen Maßstab 1 : 2000000 gilt
80km $\widehat{=}$ 4cm
100km $\widehat{=}$ 5cm
96km $\widehat{=}$ 4,8cm

Konstruktion:



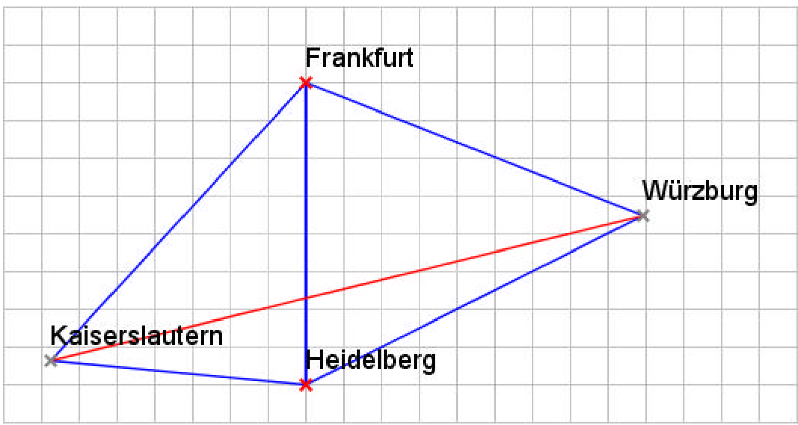
Antwort:
Würzburg liegt von Frankfurt aus im Süd-Osten mit der Himmelsrichtung von 90° + 21° = <u>111°</u>

c) Erweitern der Überlegungsfigur um Kaiserslautern



68km $\widehat{=}$ 3,4cm

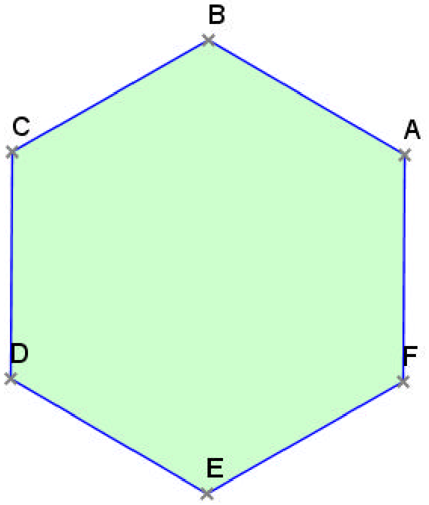
Konstruktion:
Erweitern obiger Konstruktion um Kaiserslautern



Antwort:
Die Entfernung Kaiserslautern – Würzburg beträgt in der Zeichnung 8,1 cm und damit in Wirklichkeit
8,1 · 2000000cm = 16200000cm
= <u>162km</u>

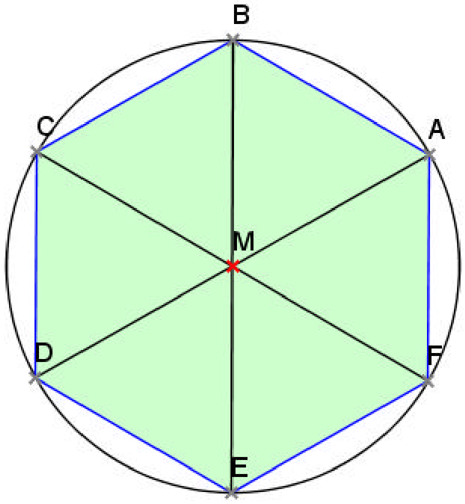
zu Aufgabe 4:

Ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF hat folgendes Aussehen:



Die 6 Dreieck entstehen, wenn man je 2 gegenüberliegende Punkte verbindet. Alle Verbindungsstrecken schneiden sich im Punkt M.

Auf Grund der Regelmäßigkeit liegen alle Punkte auf dem Kreis um M.



Wenn man zeigen soll, dass alle 6 Dreiecke zueinander kongruent sind, dann reicht es aus, wenn man zunächst zeigt, dass 2 Dreiecke kongruent sind. Für die übrigen ist die Begründung nämlich entsprechend.

Betrachte z. B. die Dreiecke ABM und BCM.

Sie sind kongruent

1. Möglichkeit: nach dem SSS-Satz, denn
   $\overline{AB} = \overline{BC}$, da Sechseck regelmäßig ist,
   [MB] ist eine gemeinsame Seite,
   $\overline{MA} = \overline{MC}$, da dies jeweils der Radius des Kreises um M ist.

2. Möglichkeit: nach dem SWS-Satz, denn
   [MB] ist eine gemeinsame Seite,
   $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = 60°$, denn alle 6 Winkel bei M ergeben zusammen 360°;
   durch die Regelmäßigkeit sind alle Winkel gleich groß und damit 60°
   $\overline{MA} = \overline{MC}$, da dies jeweils der Radius des Kreises um M ist.